

附录 1

定理 1 和定理 3 推导说明

在 QML 转换法下，由于 θ_0 处有 $E \sum_{t=1}^T \widetilde{V}'_{Nt} J_N \widetilde{V}_{Nt} = (N-1)(T-1)\sigma_0^2$ ，根据前文有 $EL_{N,T}(\theta_0) = -(1/2)(N-1)T \ln 2\pi - (1/2)(N-1)T \ln \sigma_0^2 - T \ln(1-\lambda_0) + T \ln |\mathbf{S}_N| - (1/2)(N-1)(T-1)$ 。

令 $\sigma_N^2(\lambda) = \sigma_0^2 / (N-1) \text{tr}(\mathbf{S}_N^{-1} \mathbf{S}'_N(\lambda) \mathbf{J}_N \mathbf{S}_N(\lambda) \mathbf{S}_N^{-1})$ 。 $\mathbf{S}_N(\lambda) \mathbf{S}_N^{-1} = \mathbf{I}_N + (\lambda_0 - \lambda) \mathbf{G}_N$ ，可以得到：

$$\begin{aligned} & (1/((N-1)T))EL_{N,T}(\theta) - (1/((N-1)T))EL_{N,T}(\theta_0) \\ &= -(1/2)(\ln \sigma^2 - \ln \sigma_0^2) + (1/(N-1)) \ln |\mathbf{S}_N(\lambda)| \\ & \quad - (1/(N-1)) \ln |\mathbf{S}_N| - ((1/(2\sigma^2(N-1)T)) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^T E \widetilde{V}_{Nt}(\theta) \mathbf{J}_N \widetilde{V}'_{Nt}(\theta) - (T-1)/2T - 1/(N-1)(\ln(1-\lambda) - \ln(1-\lambda_0)) \\ &= \mathbf{T}_{1,N}(\lambda, \sigma^2) - 1/(2\sigma^2) \mathbf{T}_{2,N,T}(\mathbf{k}, h, \lambda, q, d) + O(T^{-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

其中， $\mathbf{T}_{1,N}(\lambda, \sigma^2) = -(1/2)(\ln \sigma^2 - \ln \sigma_0^2) + (1/(N-1)) \ln |\mathbf{S}_N(\lambda)| - (1/(N-1)) \ln |\mathbf{S}_N| - 1/(2\sigma^2)(\sigma_N^2(\lambda) - \sigma^2) - 1/(N-1)(\ln(1-\lambda) - \ln(1-\lambda_0))(\sigma_N^2(\lambda) - \sigma^2) - (1/(N-1))$

$(\ln(1-\lambda) - \ln(1-\lambda_0))$ ， $\mathbf{T}_{2,N,T}(\mathbf{k}, h, \lambda, q, d) = 1/((N-1)T) \sum_{t=1}^T E \{ [\widetilde{\mathbf{Z}}_{Nt}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) + \widetilde{\mathbf{X}}_{Nt} \circ \mathbf{B}_{q,d}(h_0 - h) + (\lambda_0 - \lambda) \mathbf{G}_N(\widetilde{\mathbf{Z}}_{Nt} \mathbf{k}_0 + \widetilde{\mathbf{X}}_{Nt} \circ \mathbf{B}_{q,d} h_0)]' \times \mathbf{J}_N [\widetilde{\mathbf{Z}}_{Nt}(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) + \widetilde{\mathbf{X}}_{Nt} \circ \mathbf{B}_{q,d}(h_0 - h) + (\lambda_0 - \lambda) \mathbf{G}_N(\widetilde{\mathbf{Z}}_{Nt} \mathbf{k}_0 + \widetilde{\mathbf{X}}_{Nt} \circ \mathbf{B}_{q,d} h_0)] \}$ 。考虑 t 期空间自回归过程 $\mathbf{Y}_{Nt} = \lambda_0 \mathbf{W}_N \mathbf{Y}_{Nt} + \alpha_t \mathbf{I}_N + \mathbf{V}_{Nt}$ 。数据转换后，得到这个过程的对数似然函数为：

$$\begin{aligned} \ln L_{p,N}(\lambda, \sigma^2) &= -((N-1)/2) \ln 2\pi - ((N-1)/2) \ln \sigma^2 - \ln(1-\lambda) \\ & \quad + \ln(\mathbf{S}_N(\lambda)) - (1/2\sigma^2) \mathbf{V}'_{Nt}(\lambda) \mathbf{J}_N \mathbf{V}_{Nt}(\lambda) \end{aligned} \quad (3)$$

其中， $\mathbf{V}_{Nt}(\lambda) = \mathbf{S}_N(\lambda) \mathbf{Y}_{Nt}$ 。在这个纯空间自回归过程中，令 $E_p(\cdot)$ 为 \mathbf{Y}_{Nt} 的期望算子。可以得到：

$$\begin{aligned} & E_p(1/(N-1) \ln L_{p,N}(\lambda, \sigma^2)) - E_p(1/(N-1) \ln L_{p,N}(\lambda_0, \sigma_0^2)) \\ &= -(1/2)(\ln \sigma^2 - \ln \sigma_0^2) + 1/(N-1) \ln |\mathbf{S}_N(\lambda)| - 1/(N-1) \ln |\mathbf{S}_N(\lambda_0)| \\ & \quad - (1/2\sigma^2)(\sigma_N^2(\lambda) - \sigma^2) - 1/(N-1)(\ln(1-\lambda) - \ln(1-\lambda_0)) \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)等价于 $\mathbf{T}_{1,N}(\lambda, \sigma^2)$ 。根据信息不等式 $\ln L_{p,N}(\lambda, \sigma^2) - \ln L_{p,N}(\lambda_0, \sigma_0^2) \leq 0$ ，可得：对任何 (λ, σ^2) 有 $\mathbf{T}_{1,N}(\lambda, \sigma^2) \leq 0$ 。 $\mathbf{T}_{2,N,T}(\mathbf{k}, h, \lambda, q, d)$ 为 \mathbf{k} 、 h 、 λ 、 q 和 d 的二次型函数。在 $\lim_{T \rightarrow \infty} E \mathbf{H}_{NT}$ 非奇异的假定条件下，对任何 $(\mathbf{k}, h, \lambda, q, d) \neq (\mathbf{k}_0, h_0, \lambda_0, q_0, d_0)$ 有 $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{T}_{2,N,T}(\mathbf{k}, h, \lambda, q, d) > 0$ 。因此， $(\mathbf{k}, h, \lambda, q, d)$ 是全局识别的。对给定 N ， λ_0 和 σ_0^2 是 $\mathbf{T}_{1,N}(\lambda_0, \sigma_0^2)$ 的唯一最优解。当 $N \rightarrow \infty$ 时， σ_0^2 是 $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{T}_{1,N}(\lambda_0, \sigma_0^2)$ 的唯一最优解。因此， $(\mathbf{k}, h, \lambda, \sigma^2, q, d)$ 是全局识别的。结合 Lee 和 Yu (2010) 命题 1 的一致收敛和等连续性，一致性得证。

当限定 $E \mathbf{H}_{NT}$ 奇异时， $\mathbf{k}_0, h_0, \lambda_0, q_0, d_0$ 不能直接从 $\mathbf{T}_{2,N,T}(\mathbf{k}, h, \lambda, q, d)$ 中识

别。全局识别要求限定 $\mathbf{T}_{1,N}(\lambda, \sigma^2)$ 严格小于 0。因此，需根据具有式 (3) 似然函数的纯空间模型进行全局识别。通过剔除式 (3) 中的 σ^2 ，得到集中对数似然函数：

$$\ln L_{p, N}(\lambda) = -((N-1)/2)(\ln(2\pi)+1) - ((N-1)/2)\ln \hat{\sigma}_{Nt}^2(\lambda) - \ln(1-\lambda) + \ln |\mathbf{S}_N(\lambda)| \quad (5)$$

其中， $\hat{\sigma}_{Nt}^2(\lambda) = 1/(N-1)\mathbf{V}'_{Nt}(\lambda)\mathbf{J}_N\mathbf{V}_{Nt}(\lambda)$ ， $\mathbf{D}_N(\lambda) = \max_{\sigma^2} E(\ln L_{p, N}(\lambda, \sigma^2)) = -((N-1)/2)(\ln(2\pi)+1) - ((N-1)/2)\ln \hat{\sigma}_{Nt}^2(\lambda) - \ln(1-\lambda) + \ln |\mathbf{S}_N(\lambda)|$ 。 λ_0 的全局识别要求对任何 $\lambda \neq \lambda_0$ ，有 $\lim_{N \rightarrow \infty} [\mathbf{D}_N(\lambda) - \mathbf{D}_{Nt}(\lambda_0)]/N \neq 0$ ；等价于对任何 $\lambda \neq \lambda_0$ 有 $\lim_{N \rightarrow \infty} [\ln |\mathbf{S}_N(\lambda)| - \ln |\mathbf{S}_N| - ((N-1)/2)(\ln \hat{\sigma}_{Nt}^2(\lambda) - \ln \sigma_N^2(\lambda_0)) - (\ln(1-\lambda) - \ln(1-\lambda_0))]/N \neq 0$ 。各项重新调整，对 $\lambda \neq \lambda_0$ 有 $\mathbf{D}_N(\lambda) - \mathbf{D}_{Nt}(\lambda_0) \neq 0$ ，等价于对任何 $\lambda \neq \lambda_0$ 有： $\ln \left| \sigma_0^2 \mathbf{S}_N^{-1'} \mathbf{S}_N^{-1} \right| / N - \ln \left| \sigma_N^2(\lambda) \mathbf{S}_N^{-1}(\lambda)' \mathbf{S}_N^{-1}(\lambda) \right| / N + (\ln \sigma_0^2(1-\lambda_0)^{-2} - \ln \sigma_N^2(\lambda)(1-\lambda)^{-2}) / N \neq 0$ 。当 $N \rightarrow \infty$ 时，可得对任何 $\lambda \neq \lambda_0$ ，有 $\lim_{N \rightarrow \infty} ((1/N) \ln \left| \sigma_0^2 \mathbf{S}_N^{-1'} \mathbf{S}_N^{-1} \right| - (1/N) \ln \left| \sigma_N^2(\lambda) \mathbf{S}_N^{-1}(\lambda)' \mathbf{S}_N^{-1}(\lambda) \right|) \neq 0$ 。 λ_0 被识别后， σ_0^2 相应被识别。同时， $\mathbf{k}_0, h_0, \lambda_0, q_0, d_0$ 可通过 $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{T}_{2, N, T}(\mathbf{k}, h, \lambda, q, d)$ 进行识别。结合 Lee 和 Yu (2010) 命题 1 的一致收敛和等连续性结论，一致性得证。

综上，定理 1 得证。定理 3 可类似证明得到。

附录 2

定理 2 和定理 4 推导说明

在 QML 转换法下, $\sqrt{(N-1)T}(\hat{\theta}_{NT}^a - \theta_0^a) = (-1/((N-1)T)(\partial^2 \ln L_{N,T}(\bar{\theta}_{NT}^a)/\partial \theta^a \partial (\theta^a)'))^{-1}(1/\sqrt{(N-1)T}(\partial \ln L_{N,T}^{(u)}(\theta_0^a)/\partial \theta^a) - \Delta_{NT})$, 其中, $\bar{\theta}_{NT}^a$ 取值为 $\hat{\theta}_{NT}^a$ 到 θ_0^a 中间, $\Delta_{NT} = \sqrt{((N-1)/T)}\mathbf{a}_{\theta_0^a, N} + O(\sqrt{(N-1)/T^3}) + O_p(1/\sqrt{T})$. $\partial \ln L_{N,T}(\theta_0^a)/\partial \theta^a = \partial \ln L_{N,T}^{(u)}(\theta_0^a)/\partial \theta^a + \Delta_{NT}$. 类似 Yu 和 Lee 等 (2008) 的附录 D, 有 $\hat{\theta}_{NT}^a - \theta_0^a = O_p(\max(1/\sqrt{NT}, 1/T))$. 由于 $\Sigma_{\theta_0^a, NT}$ 非奇异, $\Sigma_{\theta_0^a, NT}$ 相应的逆为 $O(1)$. 根据 $(-1/((N-1)T)(\partial^2 \ln L_{N,T}(\bar{\theta}_{NT}^a)/\partial \theta^a \partial (\theta^a)'))^{-1} = \Sigma_{\theta_0^a, NT}^{-1} + O_p(\max(1/\sqrt{NT}, 1/T))$, 有 $\sqrt{(N-1)T}(\hat{\theta}_{NT}^a - \theta_0^a) + \Sigma_{\theta_0^a, NT}^{-1} \times \Delta_{NT} + O_p(\max(1/\sqrt{NT}, 1/T)) \times \Delta_{NT} = (\Sigma_{\theta_0^a, NT}^{-1} + O_p(1)) \times (1/\sqrt{(N-1)T})(\partial \ln L_{N,T}^{(u)}(\theta_0^a)/\partial \theta^a)$.

由于, $\Sigma_{\theta_0^a} = \lim_{T \rightarrow \infty} \Sigma_{\theta_0^a, NT}$ 存在, 根据 Lee 和 Yu (2010) 的命题 2 和 $\Delta_{NT} = \sqrt{(N-1)/T}\mathbf{a}_{\theta_0^a, N} + O(\sqrt{(N-1)/T^3}) + O_p(1/\sqrt{T})$ 以及 $\mathbf{a}_{\theta_0^a, N} = O(1)$ 可得:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(N-1)T}(\hat{\theta}_{NT}^a - \theta_0^a) + \sqrt{(N-1)T}\Sigma_{\theta_0^a, NT}^{-1}\mathbf{a}_{\theta_0^a, N} + O(\max(\sqrt{N/T^3}, \sqrt{1/T})) \\ & \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \Sigma_{\theta_0^a}^{-1}(\Sigma_{\theta_0^a} + \Omega_{\theta_0^a})\Sigma_{\theta_0^a}^{-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

综上, 定理 2 得证. 定理 4 可类似证明得到.

附录 3

定理 5 和定理 6 推导说明

由于 $\hat{\theta}_{NT}^{1a} = \hat{\theta}_{NT}^a + (1/T) \left(-1/((N-1)T) E(\partial^2 \ln L_{N,T}(\hat{\theta}_{NT}^a) / \partial \theta^a \partial (\theta^a)') \right)^{-1} \times \mathbf{a}_N(\hat{\theta}_{NT}^a)$,
 其中 $\mathbf{a}_N(\theta^a) = \mathbf{a}_{\theta^a, N}$ 。这表明如果：

$$\sqrt{(N-1)/T} \left(\left(-1/((N-1)T) E(\partial^2 \ln L_{N,T}(\hat{\theta}_{NT}^a) / \partial \theta^a \partial (\theta^a)') \right)^{-1} \mathbf{a}_N(\hat{\theta}_{NT}^a) - \Sigma_{\theta_0^a, NT}^{-1} \mathbf{a}_N(\theta_0^a) \right) \xrightarrow{p} 0 \quad (7)$$

当 $N/T^3 \rightarrow 0$ 时，则有： $\sqrt{(N-1)T}(\hat{\theta}_{NT}^{1a} - \theta_0^a) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{\theta_0^a}^{-1}(\Sigma_{\theta_0^a} + \Omega_{\theta_0^a})\Sigma_{\theta_0^a}^{-1})$ 。

假设 $N/T^3 \rightarrow 0$ ，我们可以类 Yu 和 Lee 等（2008）定理 4 的证明过程证明式（7）。

综上，定理 5 得证。定理 6 可类似证明得到。

附录 4

参数组合 θ_0^2 的模拟结果

表 1 是在拟极大似然（QML）转换法下，参空间动态面板 Logistic 平滑转换自回归（SDPD-LSTAR）模型，在参数组合 $\theta_0^2 = (0.2, 0.2, 0.2, 1.2, 0.6, 1.2, 2, 1)$ 下，未修正和修正的参数估计量的 Monte Carlo 模拟结果，其中， $\theta_0 = (\gamma, \rho, \lambda, \beta_1, \beta_2, \delta, q, d, \sigma^2)$ 。

表 1 双向固定效应 SDPD-LSTAR 模型基于转换法的 QML 估计结果

样本	θ		γ	ρ	λ	β_1	β_2	h	q	d	σ^2	
N=49 , T=50	$\hat{\theta}_{NT}^i$	Mean	0.2001	0.2001	0.1995	1.1993	0.6007	1.0029	2.0163	2.0007	0.9977	
		相对 Bias (%)	0.0500	0.0500	-0.2500	-0.0583	0.1167	0.2900	0.8150	0.0350	-0.2300	
		相对 RMSE (%)	0.0000	0.1000	0.1000	0.1083	0.4167	0.3100	1.6950	0.1050	0.0900	
		覆盖率	0.9510	0.9390	0.9500	0.9500	0.9440	0.9540	0.9500	0.9540	0.9440	
	$\hat{\theta}_{NT}$	Mean	0.1980	0.2020	0.1988	1.2016	0.6008	1.0042	2.0153	2.0019	0.9782	
		相对 Bias (%)	-1.0000	1.0000	-0.6000	0.1333	0.1333	0.4200	0.7650	0.0950	-2.1800	
		相对 RMSE (%)	0.0000	0.1000	0.1000	0.1083	0.4167	0.3200	1.6950	0.1050	0.1300	
		覆盖率	0.9450	0.9380	0.9470	0.9510	0.9430	0.9540	0.9500	0.9540	0.8430	
	N=49 , T=10	$\hat{\theta}_{NT}^i$	Mean	0.2001	0.2012	0.1982	1.1896	0.6004	1.0212	2.0760	2.0004	0.9698
			相对 Bias (%)	0.0500	0.6000	-0.9000	-0.8667	0.0667	2.1200	3.8000	0.0200	-3.0200
			相对 RMSE (%)	0.1000	0.5000	0.6000	0.6583	2.3333	2.4000	12.5500	0.9450	0.5800
			覆盖率	0.9480	0.9300	0.9440	0.9440	0.9540	0.9410	0.9380	0.9470	0.8380
$\hat{\theta}_{NT}$		Mean	0.1901	0.2085	0.1959	1.1970	0.6000	1.0274	2.0663	2.0080	0.8813	
		相对 Bias (%)	-4.9500	4.2500	-2.0500	-0.2500	0.0000	2.7400	3.3150	0.4000	-11.8700	
		相对 RMSE (%)	0.1500	0.5500	0.6500	0.6500	2.3333	2.5000	12.0150	0.9500	1.8100	
		覆盖率	0.8750	0.8970	0.9240	0.9360	0.9390	0.9360	0.9440	0.9510	0.4430	
N=16 , T=50		$\hat{\theta}_{NT}^i$	Mean	0.1991	0.2015	0.1967	1.1920	0.6050	1.0170	2.0236	1.9988	0.9895
			相对 Bias (%)	-0.4500	0.7500	-1.6500	-0.6667	0.8333	1.7000	1.1800	-0.0600	-1.0500
			相对 RMSE (%)	4.7500	12.8000	13.2000	5.7833	15.1833	10.9500	17.3550	4.6350	5.2500
			覆盖率	0.9380	0.9550	0.9400	0.9340	0.9500	0.9300	0.9450	0.9510	0.8740
	$\hat{\theta}_{NT}$	Mean	0.1970	0.2034	0.1960	1.1951	0.6050	1.0181	2.0226	2.0023	0.9700	
		相对 Bias (%)	-1.5000	1.7000	-2.0000	-0.4083	0.8333	1.8100	1.1300	0.1150	-3.0000	
		相对 RMSE (%)	4.7500	12.8500	13.2000	5.6750	15.1833	10.8700	17.2700	4.5850	5.1500	
		覆盖率	0.8680	0.9190	0.9240	0.9150	0.9340	0.9010	0.9110	0.9440	0.4870	

注： $\hat{\theta}_{NT}^i$ 为修正的参数估计值， $\hat{\theta}_{NT}$ 为未修正的参数估计值。下同。

表 2 是在拟极大似然（QML）直接法下，参空间动态面板 Logistic 平滑转换自回归（SDPD-LSTAR）模型，在参数组合 $\theta_0^2 = (0.2, 0.2, 0.2, 1.2, 0.6, 1.2, 2, 1)$ 下，未修正和修正的参数估计量的 Monte Carlo 模拟结果，其中， $\theta_0 = (\gamma, \rho, \lambda, \beta_1, \beta_2, \delta, q, d, \sigma^2)$ 。

表 2 双向固定效应 SDPD-LSTAR 模型基于直接法的 QML 估计结果

样本	θ		γ	ρ	λ	β_1	β_2	h	q	d	σ^2	
N=49 , T=50	$\hat{\theta}_{NT}^i$	Mean	0.2002	0.2000	0.1975	1.1962	0.6011	1.0073	2.0086	1.9995	0.9997	
		相对 Bias (%)	0.1000	0.0000	-1.2500	-0.3167	0.1833	0.7300	0.4300	-0.0250	-0.0300	
		相对 RMSE (%)	0.0000	0.1000	0.1000	0.1083	0.3833	0.3100	1.6100	0.1150	0.0900	
		覆盖率	0.9550	0.9500	0.9440	0.9550	0.9470	0.9380	0.9430	0.9480	0.9410	
	$\hat{\theta}_{NT}$	Mean	0.1977	0.2094	0.1855	1.1921	0.6034	1.0249	1.9868	2.0018	0.9617	
		相对 Bias (%)	-1.1500	4.7000	-7.2500	-0.6583	0.5667	2.4900	-0.6600	0.0900	-3.8300	
		相对 RMSE (%)	0.0000	0.1500	0.2000	0.1167	0.3833	0.3800	1.5600	0.1150	0.2300	
		覆盖率	0.9510	0.8980	0.7990	0.9480	0.9480	0.9290	0.9520	0.9480	0.7100	
	N=49 , T=10	$\hat{\theta}_{NT}^i$	Mean	0.1996	0.2031	0.1943	1.1901	0.6059	1.0206	2.0902	1.9931	0.9720
			相对 Bias (%)	-0.2000	1.5500	-2.8500	-0.8250	0.9833	2.0600	4.5100	-0.3450	-2.8000
			相对 RMSE (%)	0.1000	0.5000	0.6000	0.7000	2.3167	2.4200	13.4900	0.8750	0.5000
			覆盖率	0.9440	0.9480	0.9280	0.9480	0.9470	0.9500	0.9430	0.9400	0.8380
$\hat{\theta}_{NT}$		Mean	0.1896	0.2155	0.1805	1.1919	0.6078	1.0449	2.0622	2.0066	0.8680	
		相对 Bias (%)	-5.2000	7.7500	-9.7500	-0.6750	1.3000	4.4900	3.1100	0.3300	-13.2000	
		相对 RMSE (%)	0.1500	0.6500	0.7500	0.7167	2.3500	2.8400	12.7450	0.9700	2.0800	
		覆盖率	0.8990	0.9290	0.9010	0.9570	0.9460	0.9490	0.9440	0.9480	0.3010	
N=16 , T=50		$\hat{\theta}_{NT}^i$	Mean	0.2020	0.2000	0.1846	1.1793	0.6017	1.0373	1.9968	2.0011	0.9924
			相对 Bias (%)	1.0000	0.0000	-7.7000	-1.7250	0.2833	3.7300	-0.1600	0.0550	-0.7600
			相对 RMSE (%)	0.0500	0.4000	0.5500	0.4750	1.4667	1.4500	5.5750	0.4550	0.2700
			覆盖率	0.9520	0.9400	0.9020	0.9350	0.9320	0.9170	0.9290	0.9340	0.8990
	$\hat{\theta}_{NT}$	Mean	0.1997	0.2270	0.1438	1.1601	0.6044	1.0881	1.9305	2.0097	0.9188	
		相对 Bias (%)	-0.1500	13.5000	-28.1000	-3.3250	0.7333	8.8100	-3.4750	0.4850	-8.1200	
		相对 RMSE (%)	0.0500	0.7500	2.0500	0.6167	1.4833	2.2400	5.3550	0.4600	0.8800	
		覆盖率	0.9450	0.7580	0.4990	0.9380	0.9280	0.8560	0.8990	0.8280	0.4740	